

## Apéndice B ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS

### B.1 OBJETIVO

Describir algunos de los métodos clásicos de solución analítica de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias (e. d. l. o.).

### B.2 ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Se trata primero esta ecuación no sólo por ser la más simple, sino también porque, como se verá más adelante, la solución de una ecuación diferencial lineal ordinaria de n-ésimo orden se puede hallar resolviendo sucesivamente n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

La forma general de la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden es

$$\frac{d}{dt} y(t) + p(t) y(t) = q(t) \quad (\text{B-1})$$

y su solución general se puede hallar mediante uno cualquiera de los métodos difundidos en la literatura. Aquí se deducirá, por ejemplo, mediante el **método del factor integrante**.

Notando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y \cdot e^{\int p(t) dt}) &= e^{\int p(t) dt} \frac{dy}{dt} + y \cdot p(t) e^{\int p(t) dt} = \\ &= e^{\int p(t) dt} \left[ \frac{dy}{dt} + y \cdot p(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

$$y e^{\int p(t) dt} = \int e^{\int p(t) dt} q(t) dt + C$$

Reemplazando (B-1) en (B-2) e integrando ambos miembros se obtiene  
Por lo tanto, la solución general es:

$$y = C e^{-\int p(t) dt} + e^{-\int p(t) dt} \int q(t) e^{\int p(t) dt} \quad (\text{B-3})$$

### B.3 ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE n-ESIMO ORDEN

Cuando la e.d.l.o. es de orden mayor que uno se reescribe ésta introduciendo la notación operacional (2-59), se hallan las raíces de la ecuación característica (el polinomio en D que resulta) y se aplica la solución general (B-3).

#### EJEMPLO

Resolver:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = q(t)$$

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = q(t) \quad (\text{B-4})$$

$$(D - r_1) (D - r_2) y = \frac{q(t)}{a_0}$$

Denotando

$$(D - r_2) y = x \quad (\text{B-5})$$

la última de las ecuaciones (B-4) se puede reescribir así:

$$(D - r_1) x = \frac{q(t)}{a_0} \quad (\text{B-6})$$

que es una e. d. l. o. de primer orden cuya solución general viene dada por (B-3)

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + e^{r_1 t} \int \frac{q(t)}{a_0} e^{-r_1 t} dt \quad (\text{B-7})$$

y reemplazando (B-7) en (B-5) se obtiene:

$$(D - r_2) y = x(t) = C_1 e^{r_1 t} + e^{r_1 t} \int \frac{q(t)}{a_0} e^{-r_1 t} dt \quad (\text{B-8})$$

que es otra e. d. l. o. de primer orden cuya solución general se obtiene de (B-3).

$$y = C_2 e^{r_2 t} + e^{r_2 t} \int (C_1 e^{r_1 t} + e^{r_1 t} \int \frac{q(t)}{a_0} e^{-r_1 t} dt) e^{-r_2 t} dt$$

Otro método que se basa en el principio de linealidad (es decir, si  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  satisfacen una misma ecuación diferencial, entonces  $c_1 y_1(t)$ ,  $c_2 y_2(t)$  y  $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  también son soluciones) consiste en hallar primero la solución a la homogénea (haciendo nula la función excitación,  $q(t)$ ) y la particular después.

La solución homogénea se obtiene hallando las raíces  $r_k$  de la ecuación característica, es decir

$$(D - r_1) (D - r_2) \dots (D - r_n) y_h = 0$$

Se pueden considerar los siguientes casos:

a Todas las raíces distintas, en cuyo caso:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{r_k t} \tag{B-9}$$

Recuérdese que si los coeficientes de la ecuación diferencial son reales las raíces complejas ocurren en pares conjugados. Así por ejemplo, si  $r_1 = a + jb$ , entonces  $r_2 = a - jb$ , en cuyo caso

$$y_h(t) = C_1 e^{(a + jb)t} + C_2 e^{(a - jb)t} + \dots \tag{B-10}$$

La relación de Euler [ $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \operatorname{sen}(\alpha)$ ] permite reescribir (B-10) de la siguiente manera:

$$y_h(t) = e^{at} [K_1 \cos(bt) + K_2 \operatorname{sen}(bt)]$$

$$K_1 = C_1 + C_2 \quad K_2 = j(C_1 - C_2)$$

b Una raíz real e igual a  $r_m$  de multiplicidad  $p$ . Es decir,

$$(D - r_m)^p (D - r_{(p+1)}) (D - r_{(p+2)}) \dots (D - r_n) y_h = 0$$

En este caso la solución a la ecuación

$$(D - r_m)^p y(t) = 0 \quad (\text{B-11})$$

se supone de la forma

$$y(t) = v(t) e^{r_m t} \quad (\text{B-12})$$

donde  $v(t)$  se determina de la siguiente manera:

$$(D - r_m)^{(p-1)} e^{r_m t} Dv = (D - r_m)^{(p-2)} (D - r_m) e^{r_m t} Dv = 0 \quad (\text{B-13})$$

$$\begin{aligned} (D - r_m) e^{r_m t} Dv &= e^{r_m t} D^2 v + r_m e^{r_m t} Dv - r_m e^{r_m t} Dv = \\ &= e^{r_m t} D^2 v \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

Reemplazando (B-16) en (B-15) y generalizando se obtiene

$$(D - r_m)^p v(t) e^{r_m t} = e^{r_m t} D^p v(t) = 0 \quad (\text{B-15})$$

Resolviendo (B-17) se obtiene

$$v(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_p t^{(p-1)}$$

Y por tanto,

$$y_h(t) = e^{r_m t} \sum_{k=1}^p C_k t^{(k-1)} + \sum_{i=p+1}^n C_i e^{r_i t} \quad (\text{B-16})$$

La solución particular se puede obtener por el método de coeficientes indeterminados que consiste en suponer una solución (cuya forma depende de como sea el segundo miembro de la ecuación diferencial de acuerdo a la Tabla B.1), reemplazarla en la ecuación diferencial y hallar los coeficientes desconocidos resolviendo el sistema lineal de ecuaciones simultáneas que resulta de igualar los coeficientes que corresponden a términos semejantes.

Cuando  $q(t)$  es la suma de varios términos, la solución particular es la suma de las correspondientes a cada uno de ellos individualmente.

Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial es de la forma:

$$q(t) = e^{\alpha t} P_m(t)$$

donde  $\alpha$  es una raíz de la ecuación característica, de multiplicidad  $k$ , y donde  $P_m(t)$  es un polinomial de grado  $m$ , la solución particular es de la forma

$$y_p(t) = e^{\alpha t} \cdot t^r \cdot p_m(t)$$

donde  $p_m(t)$  es también otro polinomio de grado  $m$  de coeficientes por determinar.

$q(t)$	Solución Particular
$V$ (Constante)	$A$ (Constante)
$a_1 t^n$	$B_0 t^n + B_1 t^{(n-1)} + \dots + B_n$
$a_2 e^{rt}$	$C e^{rt}$
$a_3 \cos(wt)$	$D \cdot \cos(wt) + E \cdot \text{sen}(wt)$
$a_4 \text{sen}(wt)$	
$a_5 t^n e^{rt} \cos(wt)$	$\sum_{j=0}^n (F_j + G_j) t^{(n-j)} e^{rt} [\cos(wt) + \text{sen}(wt)]$
$a_6 t^n e^{rt} \text{sen}(wt)$	

**TABLA B.1 Solución particular de acuerdo a  $q(t)$**

Vale la pena recordar que las  $n$  constantes de la solución general se evalúan derivando  $(n - 1)$  veces la solución total [la homogénea más la particular:  $y_h(t) + y_p(t)$ ], evaluándolas en  $t = 0$  e igualando cada una de ellas a las condiciones iniciales (el valor de la respuesta y de sus derivadas temporales de orden superior en el instante que se toma como referencia) y resolviendo el conjunto de ecuaciones lineales así formado.