Capítulo 6

Circuitos de corriente directa

A continuación nos introduciremos en el estudio de circuitos eléctricos de corriente directa, es decir, de circuitos para los cuales la circulación de corriente a través de ellos se realiza en una sola dirección. Se estudiarán algunos conceptos básicos de los circuitos eléctricos y algunas propiedades eléctricas de los materiales. De igual forma, se estudiarán algunas redes circuitales sencillas y se aprenderá, desde el punto de vista teórico, cómo se miden las dos principales variables eléctricas: corriente y voltaje.

6.1. Corriente eléctrica y densidad de corriente

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, la corriente eléctrica se debe específicamente al movimiento de portadores de carga, es decir, al movimiento de los portadores de carga que se han definido como elementales: los electrones; así, se puede decir, entonces, que la corriente eléctrica es, de forma escueta, flujo de electrones. Una definición formal de corriente eléctrica es *"la rapidez con la que la carga se transfiere a través de la sección transversal de un conductor"*.

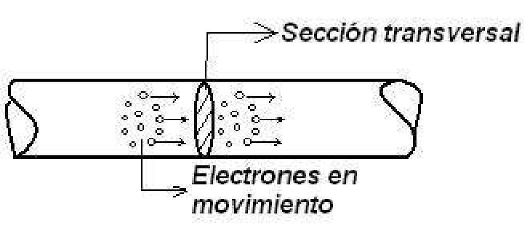

Figura 6.1: conductor a través de cuya sección transversal hay flujo de electrones.

Si se observa la figura 6.1 es posible darse cuenta que existe un flujo de electrones a través de la sección transversal del conductor, de allí es fácil deducir que:

$$I = \frac{Q}{t} \implies i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Es decir, se puede verificar que la corriente eléctrica es la razón de cambio de la carga con respecto al tiempo; o sea, la velocidad con la cual se transfiere carga neta a través de la sección transversal de un conductor.

La unidad básica de corriente es el ***Ampere*** (André Marie Ampere 1775 - 1836) y se refiere a la razón de cambio de un Coulomb en un segundo.

$$Ampere = \frac{Coulomb}{segundo} \Longrightarrow Ampere = \frac{6{,}24\times 10^{18}\ e^{-}}{1\ s}$$

Densidad de corriente

La densidad de corriente es una magnitud microscópica que está relacionada con la corriente y se denota como $\vec{J}$. Esta magnitud es un vector y representa la característica en un punto del conductor y no en el conjunto del mismo.

Si la corriente eléctrica está distribuida uniformemente a través de un conductor de sección transversal $\vec{A}$ tal como lo muestra la figura 6.2, la densidad de corriente para todos los puntos de esa sección transversal está definida como:

$$\vec{J} = \frac{i}{A}\hat{a}_i \tag{6.1}$$

De tal forma que se puede afirmar, de acuerdo con la figura 6.2, que la densidad de corriente, $\vec{J}$, es la rapidez de flujo de carga por unidad de superficie que pasa a través de una sección transversal infinitesimal.

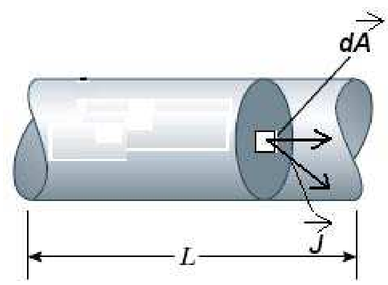

Figura 6.2: conductor de sección transversal **A** y los vectores diferencial de superficie $d\vec{A}$ y de densidad de corriente $\vec{J}$.

Ahora bien, la relación entre la densidad de corriente $\vec{J}$ e i es, para una superficie dada, la siguiente:

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \tag{6.2}$$

6.2. Resistencia, resistividad y conductividad

Resistencia

El hecho de que un conductor se caliente cuando se presenta un flujo de corriente a través de él es evidencia de que el movimiento de los portadores de carga a través del conductor no se realiza de manera libre, es decir, el trabajo realizado para mover los portadores de carga se hace con cierta oposición; esa oposición al libre flujo de electrones que exhiben los materiales es a lo que se denomina *resistencia eléctrica*.

Resistor o resistencia es, entonces, cualquier material o elemento que ostenta de modo exclusivo la resistencia al flujo de electrones como su característica eléctrica principal. Los materiales que se usan comúnmente en la fabricación de resistencias incluyen aleaciones metálicas y compuestos de carbono.

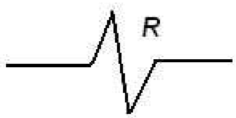

Figura 6.3: símbolo y notación de la resistencia eléctrica.

En la figura 6.3 se muestra el símbolo clásico de la resistencia eléctrica y la notación con la letra mayúscula R. La unidad de la resistencia eléctrica es el ohm (Ω), el cual está definido como la resistencia que presenta un material cuando disipa 0,24 calorías al circular a través de él una corriente eléctrica de un ampere cada segundo. Como ejemplo clásico de un material de baja resistencia se puede mencionar el cobre (Cu), el cual tiene una resistencia de 0,01 ohm por cada pie de longitud.

Resistividad

Es una caraterística propia de los materiales que está asociada a la resistencia y se define operacionalmente como:

$$\rho = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{J}|} \tag{6.3}$$

Esta ecuación se deriva del hecho de que si en un conductor aparece una diferencia de potencial se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico relacionados entre si de la siguiente forma:

$$\text{Si } V = |\vec{E}|l \Longrightarrow \; |\vec{E}| = \tfrac{V}{l}; |\vec{J}| = \tfrac{i}{A} \quad y \quad |\vec{E}| = \rho|\vec{J}| \;\Longrightarrow\; \tfrac{V}{l} = \rho\tfrac{i}{A}$$

$$\rho = \frac{RA}{l} \tag{6.4}$$

Y ρ tiene unidades de ohmios multiplicado por metro ($\Omega \cdot m$).

Conductividad

Es la propiedad que exhiben los materiales para la conducción de la corriente eléctrica y se define operacionalmente como el inverso de la resistividad.

$$|\vec{J}| = \delta|\vec{E}| \;\Longrightarrow\; \tfrac{i}{A} = \delta\tfrac{V}{l}$$

$$\delta = \frac{l}{RA} \tag{6.5}$$

La conductividad tiene unidades de mhos sobre metro ($\frac{\mho}{m}$).

6.3. Fuerza electromotriz (fem)

Existen ciertos dispositivos, tales como baterías y generadores eléctricos, los cuales pueden mantener una diferencia de potencial entre dos de sus terminales denominados puerto de salida.

Entre los terminales a y b de la batería mostrada en la figura 6.4 se establece una diferencia de potencial cuyo valor está dado por V_{ab}. A dispositivos de este tipo son a los que se denominan fuentes de fuerza electromotriz *(fem)*. Así, es posible afirmar que una fuente de fuerza electromotriz es un dispositivo en el que se produce la transformación de cualquier tipo de energía en energía eléctrica.

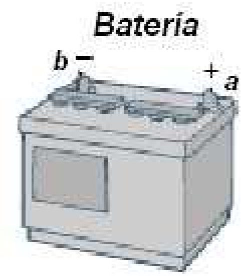

Figura 6.4: fuente de fuerza electromotriz (fem) que es capaz de mantener una diferencia de potencial entre los terminales a y b.

La figura 6.5 muestra una fuente de fuerza electromotriz (fem) a la cual se conecta una resistencia R. En el circuito los portadores de carga se mueven en la dirección que muestran la flechas de la corriente. Como se puede ver en la figura, la fuente de fem se representa mediante una flecha colocada junto a la fuente y apuntando en la dirección en la que la fuente, si obrara sola, haría que se movieran los portadores de carga positivos en el circuito exterior. La fuente de fem debe ser capaz de realizar un trabajo sobre los portadores de carga que entren a ella. En el circuito de la figura 6.5 el efecto de la fuente es el de mover los portadores de carga desde un punto de bajo potencial **(a)** a un punto de mayor potencial eléctrico **(b)**. La fuente debe hacer una cantidad de trabajo dW sobre los portadores de carga para forzarlos a que vayan al punto de mayor potencial. La fuente de fem se define entonces como:

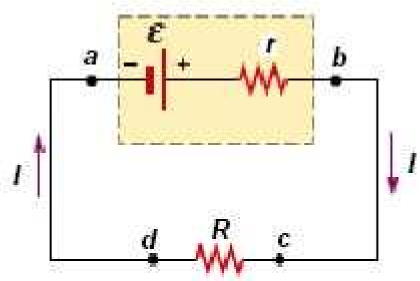

Figura 6.5: fuente de *fem* alimentando un circuito eléctrico.

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \tag{6.6}$$

Es decir, una batería tiene una *fem* de un voltio si conserva una diferencia de potencial de un voltio entre sus terminales.

6.4. Intercambio de energía en un circuito eléctrico

La figura 6.6 muestra una fuente de *fem* conectada a una *caja negra*. Es de anotar que la caja negra puede contener una resistencia, un motor, etc. Dado que la terminal **a** de la caja negra está conectada a la terminal positiva de la fuente, está a mayor potencial que la terminal **b** de la caja.

Así, la energía potencial de un diferencial de carga dq que se mueve **a** través de la caja desde la terminal **a** hasta la terminal **b** disminuye su energía potencial en una cantidad dU. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la energía perdida por el diferencial de carga dq se transforma en otro tipo de energía dentro de la caja y este tipo de transformación depende estrictamente de lo que haya en la caja. Ahora bien, si se considera que en un tiempo dt la energía dU transformada en la caja es:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dqV_{ab}}{dt}$$

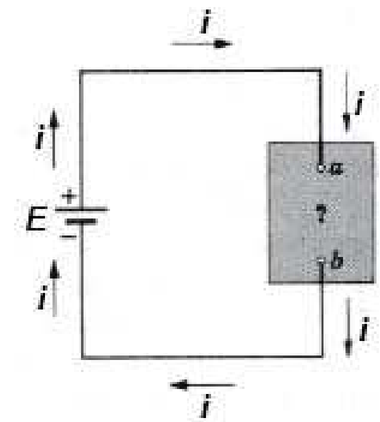

Figura 6.6: la fuente de fuerza electromotriz (fem) proporciona la energía necesaria para hacer circular una corriente eléctrica i a través de una caja negra.

Además, conociendo que la velocidad de transferencia de energía de un lugar a otro $\frac{dU}{dt}$ se conoce como potencia, entonces:

$$P(t) = i(t)v_{ab}(t) \tag{6.7}$$

6.5. Circuitos eléctricos o redes circuitales

De forma simple una red eléctrica, también llamada circuito eléctrico, es una o varias trayectorias cerradas conformadas por elementos de circuito eléctrico (fuentes de fem, resistencias, capacitancias, inductancias, etc) a través de la cual o cuales puede circular la carga eléctrica.

La figura 6.7 muestra una red circuital. Si se pretende hacer el análisis de este circuito, es necesario establecer cuáles son las dos variables principales que definen su comportamiento eléctrico, tales variables son: la corriente $i(t)$ y el voltaje o diferencia de potencial $v(t)$. Es decir, para conocer el comportamiento del circuito es necesario obtener las diferencias de potencial en terminales y las corrientes a través de los elementos de circuito que lo componen.

Ahora bien, las dos variables principales de la teoría de circuito ya han sido estudiadas, lo que no se ha estudiado es cómo obtenerlas para un circuito específico; para ello es necesario conocer y estudiar dos teoremas comúnmente llamados leyes de Kirchhoff.

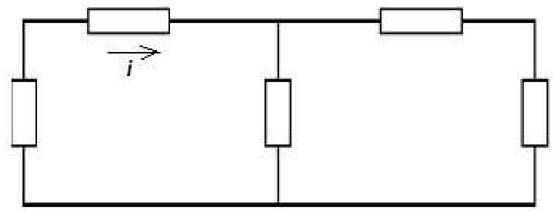

Figura 6.7: circuito eléctrico, los rectángulos pueden representar fuentes, resistencias, capacitancias, inductancias, ect.

Teorema de nodo o primera ley de Kirchhoff

Nodo: se define nodo como un punto de unión común a dos o más elementos de circuito eléctrico.

En consonancia con la definición anterior, el teorema de nodo o primera ley de Kirchhoff afirma que: *en un circuito eléctrico, de parámetros concentrados, en todo instante t, la suma algebraica de las corrientes que entran o salen de un nodo es igual a cero.*

$$\sum_{n=1}^{p} i(t) = 0 \ \forall \ t \tag{6.8}$$

Teorema de trayectoria o segunda ley de Kirchhoff

Para cualquier trayectoria cerrada conformada por elementos de circuito, en todo instante t, la suma algebraica de las diferencias de potencial en terminales de los elementos que conforman esa trayectoria cerrada es igual a cero.

$$\sum_{n=1}^{p} v(t) = 0 \ \forall \ t \tag{6.9}$$

6.6. Medición de corriente y de voltaje

Amperímetro. Es un instrumento de medida que es usado para sensar la cantidad de corriente que circula a través del circuito eléctrico o de uno de los elementos que lo conforman. Dado que la corriente está definida como la velocidad de circulación de carga eléctrica, es necesario que la carga circule a través del instrumento de medición y por lo tanto este último debe estar conectado en serie con el circuito o elemento al cual se le desea medir la corriente.

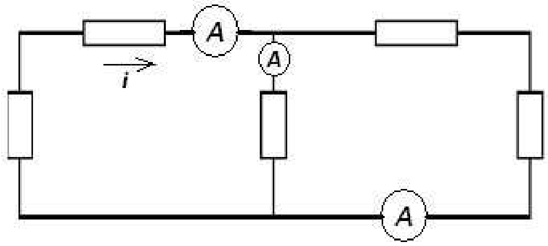

Figura 6.8: circuito eléctrico y conexión de varios amperímetros para medir la corriente a través de los elementos.

La figura 6.8 muestra un circuito eléctrico en el cual se conectan tres amperímetros con los cuales se realiza la medición de todas las corrientes que circulan por el circuito. Como se puede verificar del dibujo, los amperímetros están conectados en serie con el elemento al cual se le está midiendo la corriente.

Voltímetro. Este es el instrumento de medida utilizado para sensar la diferencia de potencial o voltaje en un circuito eléctrico o en los elementos que lo componen. Dado que lo que se busca es medir la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, este instrumento se conecta simplemente entre los dos puntos a los cuales se les desea conocer la diferencia de potencial. En la figura 6.9 se muestra un circuito eléctrico en el cual se conectan varios voltímetros con los cuales se realiza la medición de todas las diferencias de potencial en terminales de los elementos que componen el circuito. Como se puede verificar del dibujo, los voltímetros están conectados en paralelo con el elemento al cual se le está midiendo la diferencia de potencial.

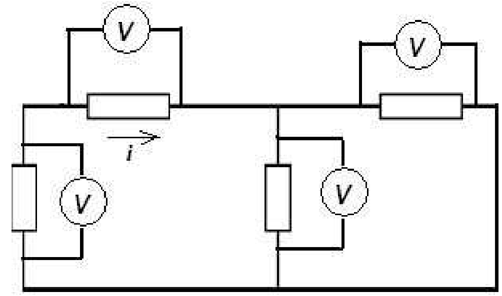

Figura 6.9: circuito eléctrico y conexión de varios voltímetros para medir la diferencia de potencial en terminales de los elementos.

6.7. Circuito RC

Como ya se ha mencionado, un condensador es un elemento almacenador de energía y por lo tanto dinámico, es decir, almacena carga y energía en su campo eléctrico por un tiempo y puede entregarlos de manera posterior. En circuitos de corriente directa (DC) que contienen este tipo de elementos, la corriente y el voltaje varían a diferencia de lo que sucede con circuitos DC que contienen únicamente resistencias.

Ahora bien, para encontrar la corriente en el circuito es necesario aplicar el teorema de trayectoria al circuito mostrado en la figura 6.10c, es decir, una vez se ha cerrado el interruptor.

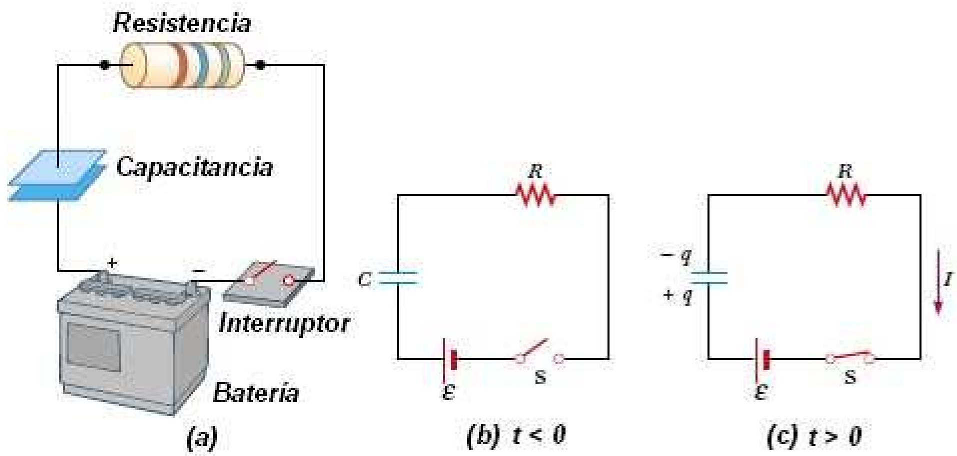

Figura 6.10: (a) circuito RC alimentado con una fuente de *fem* y que contiene un interruptor. (b) Representación circuital de la figura 6.10a para $t < 0$, es decir con el interruptor abierto. (c) Representación circuital de la figura 6.10a para $t > 0$, es decir con el interruptor cerrado.

$$\sum_{n=1}^{p} v(t) = 0 \implies \varepsilon - v_R - v_C = 0 \implies \varepsilon - i(t)R - \frac{q(t)}{c} = 0$$

Derivando la ecuación anterior se tiene:

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = 0 \implies \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}i(t)$$

Como se trata de una ecuación diferencial de variables separables, se separan las variables y se integra:

$$\frac{di(t)}{i(t)} = \frac{1}{RC}dt \implies \int_{I_0}^{i(t)} \frac{di(t)}{i} = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt$$

$$\ln i(t)\Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{1}{RC}t \implies \ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

Ahora aplicando la definición de logaritmo natural se obtiene que:

$$\frac{i(t)}{I_0} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

De tal forma que:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{6.10}$$

Ahora bien, para calcular el voltaje en el condensador es necesario partir de la definición de capacitancia ofrecida en el capítulo 5: $C = \frac{q(t)}{v(t)}$, por lo tanto $q(t) = Cv(t)$; derivando a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} \implies i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \implies dv(t) = \frac{1}{C}i(t)dt$$

$$\int_0^{v(t)} dv(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \implies \int_0^{v(t)} dv(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$v(t) = -\frac{RC}{C}I_0\left[e^{-\frac{1}{RC}t}\right]_0^t \implies v(t) = -RI_0\left[e^{-\frac{1}{RC}t}\right]_0^t$$

De tal forma que:

$$v(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{6.11}$$

Para encontrar la función de carga en el condensador, se aplica la definición de corriente estudiada al inicio de este capítulo: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

$$\int_0^{q(t)} dq(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}dt \implies q(t) = -\frac{RC\varepsilon}{R}\left[e^{-\frac{1}{RC}t}\right]_0^t$$

Así que evaluando y organizando se obtiene que:

$$q(t) = q_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{6.12}$$