

Capítulo 5

Condensadores y dieléctricos

A continuación se iniciará el estudio de un dispositivo que almacena energía en forma de carga por medio de un campo eléctrico. Este dispositivo es comúnmente llamado *condensador* o *capacitancia*. Estos dispositivos tienen múltiples aplicaciones en circuitos eléctricos o electrónicos; por ejemplo, estos elementos son usados en circuitos sintonizadores de frecuencia de los receptores de radio, como componentes de circuitos de filtro, como elementos de acople en circuitos de Corriente alterna (AC) y de corriente directa (DC), como elementos almacenadores de energía en dispositivos electrónicos, como sensor de activación en las bolsas de aire de los automóviles, etc.

5.1. Capacitancia

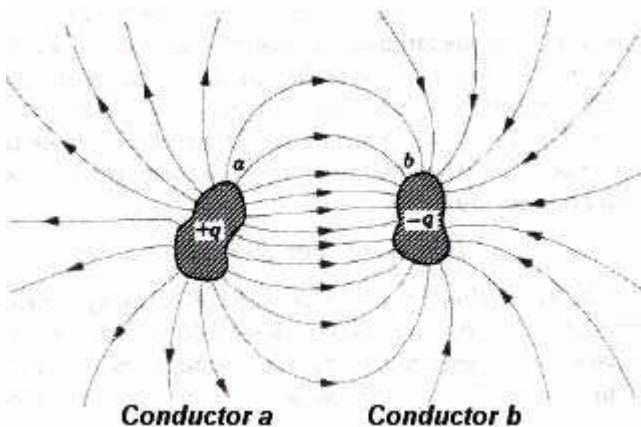


Figura 5.1: dos conductores (conductor a y b) aislados el uno del otro forman un condensador.

Así como se estudió en física I y se verificó que cuando se comprime o estira un resorte se almacena energía en forma de energía potencial elástica o como cuando se levanta un cuerpo para ubicarlo a una altura específica respecto al piso que también se produce almacenamiento de energía mecánica en forma de energía potencial gravitacional, el condensador es un dispositivo que puede almacenar carga y energía en forma de energía potencial eléctrica.

Ahora bien, para encontrar la definición de capacitancia, suponga dos conductores cargados eléctricamente a $+q$ y $-q$, separados una distancia específica como lo muestra

la figura 5.1. Como se puede verificar, allí se produce un campo eléctrico entre las cargas y, por lo tanto, aparece una diferencia de potencial entre los conductores. Experimentalmente se ha verificado que esta diferencia de potencial V es proporcional a la carga en los conductores, es decir:

$$V \propto q$$

Esta constante de proporcionalidad se denomina capacitancia y se representa por la letra mayúscula C . Así, la capacitancia se define operacionalmente como *la razón de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores y la diferencia de potencial entre ellos*.

$$C \equiv \frac{q}{V} \quad (5.1)$$

De tal forma que la capacitancia es una medida de la capacidad de un dispositivo (condensador) para almacenar carga y energía potencial eléctrica. En concreto, un condensador es un dispositivo de dos terminales que consiste de dos cuerpos conductores separados por un material no conductor denominado **dieléctrico** cuya función principal es el almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico.

Unidades de la capacitancia

Del análisis dimensional de la ecuación 5.1, es posible encontrar, con facilidad, la unidades de capacitancia. Si se conoce que la unidad de carga eléctrica en el Sistema Internacional es el Coulomb (C) y la de potencial eléctrico es el Volt (V), entonces la unidad de capacitancia será:

$$C = \frac{[\text{Coulomb}]}{[\text{Volt}]} \implies C = [\text{Faradio}]$$

Es decir, un condensador tendrá una capacitancia de 1 Faradio cuando cada conductor posea una carga de 1 Coulomb y la diferencia de potencial entre los conductores sea de 1 Volt.

Es necesario aclarar que la capacitancia depende del arreglo geométrico de los conductores, tal como se aclarará más adelante; por tal razón el Faradio (F) resulta ser una unidad muy grande y, generalmente, los dispositivos típicos tienen capacitancias que oscilan entre los microfaradios (μF) y los picofaradios (pF).

5.2. Cálculo de la capacitancia

En el numeral anterior se especificó que la capacitancia depende, a parte de la carga en los conductores y de la diferencia de potencial entre ellos, de la geometría de los conductores que forman el condensador. Así, el cálculo de la capacitancia puede obtenerse

fácilmente a partir de la ecuación 5.1, este cálculo resulta relativamente sencillo si la geometría del condensador es simple, es decir, muestra elevada simetría.

Condensador de placas paralelas

Considérese inicialmente dos placas paralelas cargadas eléctricamente a $+Q$ y $-Q$, separadas una distancia d , tal como lo muestra la figura 5.2.

Como de lo que se trata es de calcular la capacitancia de este condensador de placas paralelas, entonces se hace uso de la ecuación 5.1: $C = \frac{q}{V}$; pero, como se estudió en el capítulo 4, $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Ahora bien, de lo estudiado en el capítulo 3, se puede verificar con facilidad que el campo eléctrico \vec{E} para un par de placas paralelas está dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{a}_n ; \text{ entonces } V = -\int \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{a}_n \cdot dl \hat{a}_n$$

Así que se puede afirmar que:

$$V = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} d , \text{ y como } \rho = \frac{q}{A} \implies V = \frac{qd}{A\epsilon_0}$$

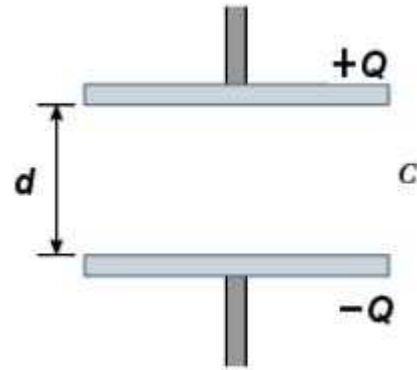


Figura 5.2: condensador de placas paralelas con carga Q y diferencia de potencial V .

De tal forma que la capacitancia para un condensador de placas paralelas está dada por:

$$C = \frac{q}{V} \implies C = \frac{q}{\frac{qd}{A\epsilon_0}}$$

De donde se obtiene que:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \tag{5.2}$$

Si se observa de forma cuidadosa la ecuación 5.2, es posible concluir que la capacitancia de un **condensador de placas paralelas** es directamente proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre placas. Aquí se hace evidente, como se mencionó en el numeral anterior, que la capacitancia depende de la geometría del condensador; en este caso, para obtener una capacitancia del orden de los microfaradios, es necesario que las placas tengan un área del orden de 100 m^2 y una separación entre placas de 1 mm.

También es posible, de acuerdo con la definición operacional de capacitancia ($C = \frac{q}{V}$), afirmar que la carga almacenada para un condensador, a una diferencia de potencial dada entre placas, crece a medida que aumenta la capacitancia y la cantidad de carga

necesaria para producir una diferencia de potencial dada, aumenta cuando decrece la separación entre placas.

$$q = \frac{A\epsilon_0}{d}V$$

Condensador de dos cilindros concéntricos

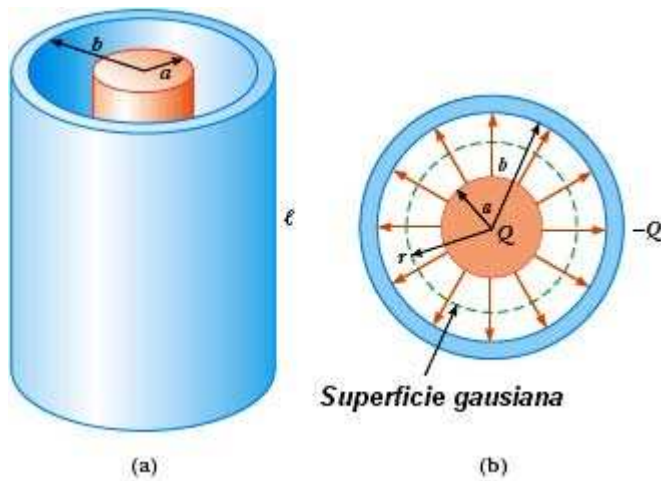


Figura 5.3: (a) dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b . (b) Vista superior del capacitor cilíndrico y superficie gaussiana para el cálculo del campo eléctrico entre los cilindros.

Considérese ahora un conductor cilíndrico de radio a y de carga $+Q$ que se encuentra concéntrico con un cascarón cilíndrico de radio b y carga $-Q$, tal y como lo muestra la figura 5.3a. Aquí se procede de forma similar a como se hizo para un condensador de placas paralelas, es decir:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ y } V_b - V_a = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como se estudió en el capítulo 3 y aplicando la ley de Gauss, se verifica que el campo eléctrico para un cilindro circular recto como el mostrado está dado por:

$$\vec{E} = \frac{2k_e\rho}{r}\hat{a}_r$$

Así las cosas, la diferencia de potencial entre los dos cilindros concéntricos se puede expresar como:

$$V_b - V_a = - \int \frac{2k_e\rho}{r}\hat{a}_r \cdot dr\hat{a}_r$$

De tal forma que:

$$V_b - V_a = -2k_e\rho \int_a^b \frac{1}{r}dr \implies V_b - V_a = -2k_e\rho[\ln r]_a^b$$

$$V_b - V_a = -2k_e\rho[\ln b - \ln a] \implies V_a - V_b = 2k_e\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ahora bien, como se conoce que $\rho = \frac{Q}{l}$;

$$C = \frac{Q}{2k_e\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \implies C = \frac{Q}{2k_e \frac{Q}{l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

De donde se obtiene que la capacitancia para un condensador cilíndrico concéntrico es:

$$C = \frac{l}{2k_e \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5.3)$$

Si se analiza la ecuación 5.3, es posible afirmar que la capacitancia de dos cilíndricos concéntricos es directamente proporcional a la longitud de los cilindros e inversamente proporcional al logaritmo natural de la relación entre el radio mayor y el radio menor de los cilindros. Vale señalar que también aquí se observa que la capacitancia depende de la geometría de los conductores.

Condensador de dos esferas concéntricas

Como ejercicio, obtenga la ecuación de capacitancia para un condensador conformado por dos esferas conductoras concéntricas y llegue a la siguiente ecuación:

$$C = \frac{ab}{k_e(b - a)} \quad (5.4)$$

Donde a es el radio de la esfera más pequeña y b el de la de mayor radio.

5.3. Condensadores y dieléctricos

En el capítulo 1 se estudió un poco acerca de la teoría atómica de los materiales y se verificó que un aislante o dieléctrico es un material no conductor que no permite el paso o intercambio de electrones periféricos entre sus átomos; ejemplos de este tipo de materiales son los gases nobles, el aceite, la madera, el caucho, el vidrio, etc. Ahora bien, hasta el momento se ha estudiado la capacitancia cuando el material entre los conductores es el espacio libre, ¿qué sucedería si el espacio entre conductores de una capacitancia se llena de un material dieléctrico?

En la figura 5.3a se muestra un condensador de placas paralelas cuyo dieléctrico es el espacio libre; a las placas del condensador se conecta un voltímetro ideal ($R = \alpha$), la lectura del voltímetro registra un valor igual a V_0 , de tal forma que la capacitancia en este caso es: $C_0 = \frac{Q_0}{V_0}$.

Si, por otra parte, se le introduce al mismo condensador un dieléctrico entre sus placas, figura 5.4b, y nuevamente se conecta el multímetro entre sus terminales, se encuentra que el voltaje entre placas disminuye; como no existe una trayectoria para que la carga fluya, ésta permanece constante para ambos casos y se puede afirmar que *en presencia*

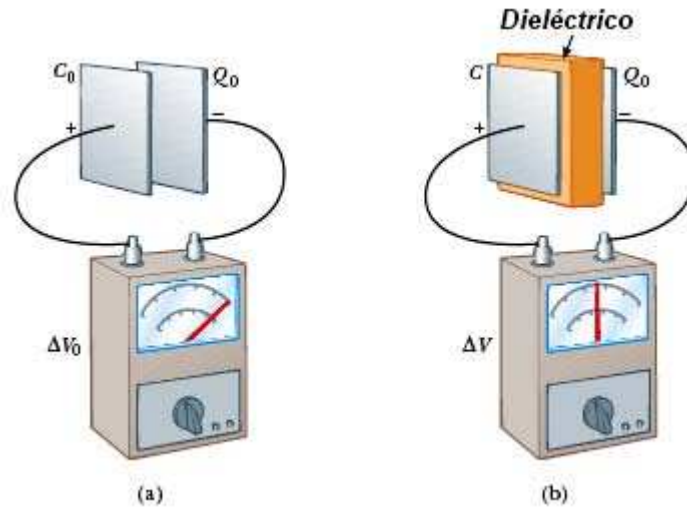


Figura 5.4: (a) condensador de placas paralelas sin dieléctrico entre placas, con carga Q_0 y diferencia de potencial entre placas V_0 . (b) El mismo condensador de la figura 5.4a pero ahora con un dieléctrico entre placas.

de un dieléctrico el voltaje entre placas disminuye en un factor K de la siguiente forma:

$V = \frac{V_0}{K}$; donde $V < V_0$ y por lo tanto $K > 1$. Como la carga en el condensador permanece constante, entonces:

$$C = \frac{Q_0}{V} \implies C = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{K}} \implies C = \frac{KQ_0}{V_0}$$

De donde se obtiene entonces que:

$$C = KC_0 \quad (5.5)$$

De la ecuación 5.1 se puede concluir que la capacitancia en un condensador lleno de dieléctrico aumenta en un factor adimensional k , llamado **constante dieléctrica**. Así, por ejemplo, para un condensador de placas paralelas con dieléctrico se obtendría que su capacitancia sería igual a:

$$C_0 = \frac{A\epsilon_0}{d} \implies C = K \frac{A\epsilon_0}{d}$$

5.4. Combinación de condensadores

Con alguna frecuencia es posible encontrar circuitos eléctricos en los cuales se presentan combinaciones en la conexión de varios condensadores y, en general, resulta conveniente encontrar una capacitancia equivalente que pueda sustituir la conexión por una

más simple con propósitos de análisis.

Combinación de condensadores en paralelo

Cuando una batería se conecta a un circuito que contiene condensadores, se produce, desde la terminal positiva de la batería (fuente) a la placa positiva de los condensadores conectados a ella, un flujo de carga y también, desde la terminal negativa de la fuente a la placa negativa del condensador.

En la figura 5.5 se puede ver un par de condensadores C_1 y C_2 conectados en paralelo y alimentados por una fuente de voltaje que mantiene una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales. Como se nota, dos de las placas de los condensadores están conectados al mismo terminal (positivo) de la fuente y las otras dos placas están conectadas al terminal negativo, de esta forma se construye una conexión paralelo. Si lo que se pretende es encontrar una capacitancia equivalente C_{eq} que sustituya las capacitancias C_1 y C_2 , es necesario que la capacitancia equivalente tenga el mismo efecto que la conexión paralelo, es decir, debe

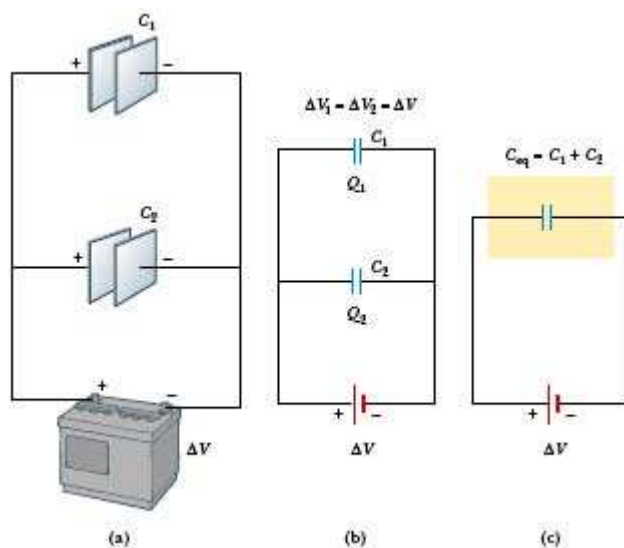


Figura 5.5: (a) circuito con dos condensadores conectados en paralelo y alimentados por una fuente de voltaje . (b) Representación circuital de la figura 5.5a. (c) Capacitancia equivalente de la conexión paralelo.

almacenar exactamente la misma cantidad de carga en sus placas que la almacenada por C_1 y C_2 .

Es evidente, de acuerdo con la figura 5.5a, que la carga total entregada por la fuente al circuito de los dos condensadores en paralelo se reparte entre ambos, de tal forma que:

$$Q_{Total} = Q_1 + Q_2; \text{ y } Q_1 = C_1 V_1 \text{ y } Q_2 = C_2 V_2$$

Además se puede notar que la diferencia de potencial es la misma para ambos condensadores, es decir: $V_1 = V_2$, entonces:

$$Q_{Total} = C_1 V + C_2 V \implies Q_{Total} = (C_1 + C_2) V$$

Como $Q_{Total} = C_{eq}V$ y $Q_{Total} = (C_1 + C_2)V$; entonces este par de ecuaciones es equivalente si:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (5.6)$$

De la ecuación 5.6 es posible concluir que *la capacitancia equivalente de un conjunto de n condensadores conectados en paralelo es simplemente la suma de las capacitancias de los n condensadores que componen la combinación.*

Combinación de condensadores en serie

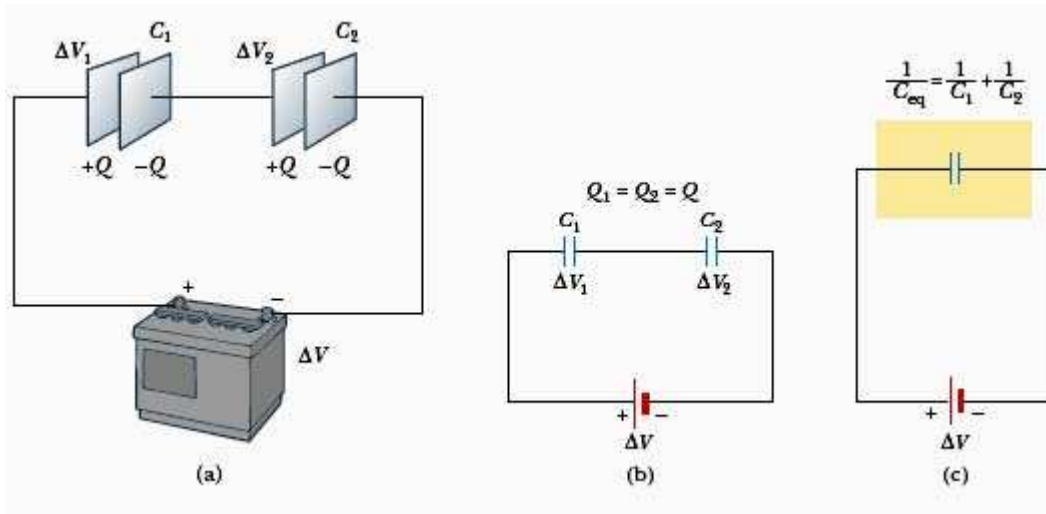


Figura 5.6: (a) circuito con dos condensadores conectados en serie y alimentados por una fuente de voltaje . (b) Representación circuital de la figura 5.6a. (c) Capacitancia equivalente de la conexión serie.

La figura 5.6a muestra un par de condensadores o capacitancias conectadas en serie. Allí se puede notar que la corriente que circula por cada una de las capacitancias es la misma y, por lo tanto, la carga para cada una de las capacitancias también es la misma: $Q = Q_1 = Q_2$; es decir, si la carga presente en el circuito es Q , los condensadores quedarán cargados a $+Q$ y $-Q$ para cada placa.

Ahora bien, si lo que se pretende es encontrar una capacitancia equivalente a la conexión serie de C_1 y C_2 tal y como lo muestra la figura 5.6c, entonces:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \text{ y } V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

La diferencia de potencial en el circuito será:

$$V = V_1 + V_2 \implies V = \frac{Q}{C_{eq}} \implies \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Y como se mencionó antes: $Q = Q_1 = Q_2$, entonces:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \implies \frac{Q}{C_{eq}} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Y la anterior igualdad se cumple si y sólo si:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (5.7)$$

Así, se puede concluir que *la capacitancia equivalente para n capacitancias conectadas en serie es igual a uno sobre la suma de los inversos de cada una de las n capacitancias conectadas en serie:*

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \right) \quad (5.8)$$

5.5. Almacenamiento de energía en el campo eléctrico

En el capítulo 4 se encontró que cualquier configuración de cargas tiene cierta energía potencial eléctrica U definida como el trabajo (positivo o negativo) que debe realizarse para constituir la configuración de carga a partir de sus componentes individuales a los que se supone inicialmente separados por distancias infinitas y en reposo.

En la figura 5.7 se muestran dos cargas $+q$ y $-q$ inicialmente unidas. Si se desea separar estas dos cargas es necesario realizar un trabajo W en contra de la fuerza eléctrica que las mantiene unidas. Ahora bien, ¿dónde se almacena esta energía? De acuerdo con lo que se estudió en el capítulo 4, esta energía se almacena en el sistema conformado por las dos cargas como energía potencial eléctrica y es posible recuperarla si se permite que las cargas se vuelvan a juntar.

Ahora, supongamos una capacitancia de placas paralelas (fig. 5.8) que va a ser cargada a una carga específica, ¿cómo se realiza el trabajo para cargar el condensador? Supóngase que un agente externo toma electrones de la placa 1 y los transfiere a la placa 2, con lo cual se está produciendo una separación de cargas; generalmente este trabajo es realizado mediante una batería. Ahora bien, considérese que en el instante t se ha transferido una cantidad de carga $q'(t)$ de una placa a la otra. De acuerdo con esta transferencia de carga, aparece una diferencia de potencial entre placas que está dada por:

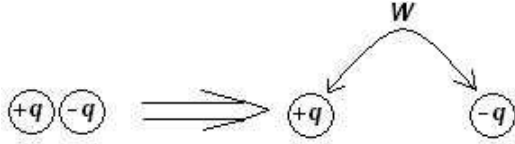


Figura 5.7: dos cargas inicialmente unidas y luego se separan realizando un trabajo W .

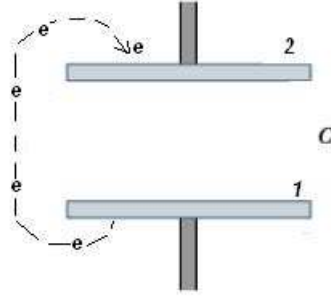


Figura 5.8: dos placas paralelas (1 y 2) y electrones que se desplazan de la placa 1 hacia la placa 2.

$$V(t) = \frac{q'(t)}{C}$$

Dado que una pequeña cantidad o elemento diferencial de trabajo está definido como $dW = Vdq$, entonces se tiene que:

$$dW = \left(\frac{q'(t)}{C} \right) dq'$$

Ahora, si se comunicara o transfiriera una cantidad total de carga q , el trabajo total requerido para llevar a cabo esta transferencia será:

$$W = \int dW \implies W = \int_0^q \left(\frac{q'(t)}{C} \right) dq'$$

De tal forma que la energía total requerida para llevar a cabo la transferencia de carga es:

$$W = \frac{q^2}{2C} \quad (5.9)$$

Si además se tiene en cuenta que $q = CV$, entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \quad (5.10)$$

Ahora, como el potencial eléctrico V se define como $V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, es razonable suponer que la energía almacenada en una capacitancia se encuentra en el campo eléctrico. Así, cuando aumenta q o V aumenta también el campo eléctrico y cuando no existe carga ni potencial eléctrico tampoco hay campo eléctrico.

Densidad de energía

La energía almacenada por unidad de volumen u se define como densidad de energía. Por ejemplo, en un condensador de placas paralelas, si se desprecia el efecto de los bordes, el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todos los puntos entre las placas, por lo tanto la densidad de energía u también debe ser uniforme y está dada por:

$$u = \frac{U}{Ad} \implies u = \frac{CV^2}{2Ad}$$

Recordando que la capacitancia de un condensador de placas paralelas con dieléctrico es: $C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$, entonces:

$$u = \frac{\frac{1}{2}K\varepsilon_0 \frac{A}{d} V^2}{Ad} \implies u = \frac{K\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

Y como $\left(\frac{V}{d}\right)$ se ha definido como intensidad de campo eléctrico, entonces:

$$u = \frac{K\varepsilon_0}{2} E^2 \tag{5.11}$$

De la ecuación 5.11 se puede afirmar que si existe un campo eléctrico \vec{E} en cualquier punto del espacio, allí existe una cantidad de energía almacenada cuya magnitud por unidad de volumen es $\frac{K\varepsilon_0}{2} E^2$.