Capítulo 3

La ley de Gauss

Hasta aquí se ha verificado como calcular el campo eléctrico debido a cargas puntuales en particular y a distribuciones de carga en general; para ello se hizo uso de la ley de Coulomb definiendo el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ en términos de la ley mencionada, de la siguiente forma:

$$\vec{E} = \tfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{a}_r$$

Ahora bien, a partir de este momento se estudiará otra forma para calcular el campo eléctrico. Tal procedimiento se fundamenta en una de las cuatro leyes básicas del electromagnetismo o leyes de Maxwell, la ***ley de Gauss para la electricidad***:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$$

Esta ley, aplicada a cualquier superficie hipotética cerrada (llamada superficie gaussiana), expresa una relación entre el flujo eléctrico Φ y la carga neta q encerrada por la superficie. Así, la ley de Gauss establece que el flujo total que sale de una superficie cerrada es igual a la carga neta contenida por dentro de la superficie. La ley de Gauss servirá, entonces, para resolver situaciones que involucren el cálculo del campo eléctrico en superficies de mayor complicación.

3.1. Flujo de un campo vectorial

El flujo, representado por la letra mayúscula Φ, es una propiedad de cualquier campo vectorial y tiene que ver con una superficie cerrada o abierta.

Para un campo de flujo, el flujo vectorial (Φ_v) se mide por el número de líneas de campo que representan el campo vectorial y que atraviesan la superficie hipotética en cuestión.

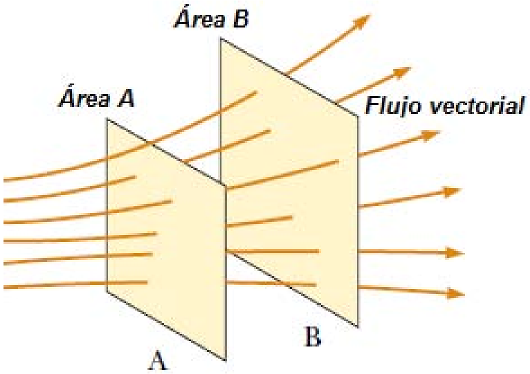

Figura 3.1: superficie sumergida dentro de un campo vectorial y atravesada por un conjunto de líneas de campo vectorial.

La figura 3.1 muestra dos figuras de superficies A y B que se encuentran sumergidas en un lugar del espacio en el cual existe un campo vectorial. Allí se puede notar que las líneas de campo que representan el campo vectorial y que atraviesan las superficies es a lo que se denomina flujo vectorial. Así, se puede definir el flujo vectorial, de forma escueta, como el número de líneas de campo que atraviesan una superficie específica. De tal forma que si se trata de líneas de campo eléctrico las que atraviesan una superficie, entonces se estará hablando de un flujo eléctrico Φ_E.

3.2. flujo de campo eléctrico

El flujo de campo eléctrico, de forma similar a como se describió el campo vectorial, se define como la medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan cierta superficie. Para precisar un poco más la idea de flujo de campo eléctrico Φ_E, considérese la figura 3.2 mostrada al lado derecho de la hoja. Allí se muestra una superficie cerrada arbitraria inmersa dentro de un campo eléctrico. Ahora bien, supóngase la mencionada superficie dividida en superficies elementales cuadradas ΔS, cada una de las cuales se considera tan pequeña que puede asimilarse como plana. Entonces, es posible representar un pequeño elemento diferencial de superficie como un vector $\Delta\vec{S}$ que es normal a la superficie y apunta hacia afuera de ella.

Así las cosas, para cada elemento diferencial de superficie es posible trazar el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ en ese elemento de superficie.

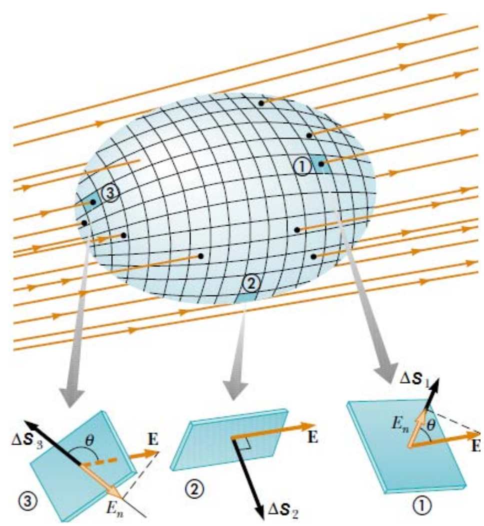

Figura 3.2: superficie cerrada dentro en un campo eléctrico y los vectores diferencial de superficie $\Delta\vec{S}$ y $\vec{E}$ para varios elementos infinitesimales.

Como este elemento diferencial se ha considerado tan pequeño como es posible, entonces el campo eléctrico $\vec{E}$ puede asumirse constante en todos los puntos de un cuadrado dado.

Se tiene entonces que, de acuerdo con lo mostrado en la parte inferior de la figura 3.2, los vectores de campo eléctrico $\vec{E}$ y de superficie $\Delta\vec{S}$ que caracterizan cada elemento infinitesimal de superficie forman un ángulo θ entre si. Como el número de líneas de campo eléctrico que penetran el elemento infinitesimal de área $\Delta\vec{S}$ está representado por una medida de la proyección del vector $\vec{E}$ sobre el vector $\Delta\vec{S}$, entonces el flujo eléctrico Φ_i para el elemento diferencial i se define como:

$$\Phi_i = |E_i||\Delta S_i|\cos\theta_i \Longrightarrow \Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

Si lo que se pretende es hallar el flujo total sobre toda la superficie mostrada en la figura 3.2, entonces:

$$\Phi \cong \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

Ahora bien, para definir con mayor exactitud el flujo eléctrico sobre la superficie analizada, es necesario considerar que los elementos infinitesimales de superficie se hacen muy pequeños, tendiendo a cero, con lo cual la anterior ecuación se convierte en:

$$\Phi = \lim_{\Delta\vec{S}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$$

De tal forma que:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{3.1}$$

La ecuación 3.1 muestra que la integral de superficie indica que la superficie analizada se debe dividir en elementos infinitesimales de área $d\vec{s}$ y debe evaluarse la cantidad escalar $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ para cada elemento y hacer la suma sobre toda la superficie.

3.3. Ley de Gauss

Como se mencionó en la introducción, la ley de Gauss, aplicada a cualquier superficie gaussiana, expresa una relación entre el flujo eléctrico Φ y la carga neta q encerrada por la superficie. De esta forma, la ley de Gauss establece que existe una proporcionalidad entre la carga encerrada por una superficie gaussiana y el flujo eléctrico para esa superficie.

A continuación se verificará de dónde sale esta ecuación. Supóngase inicialmente una carga puntual q ubicada en el centro de una esfera (superficie gaussiana) de radio r tal y como lo muestra la figura 3.3. Ahora bien, de lo estudiado en el capítulo 2, se puede afirmar que el campo eléctrico generado por una carga puntual en un punto sobre la superficie de la esfera está dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{a}_r$$

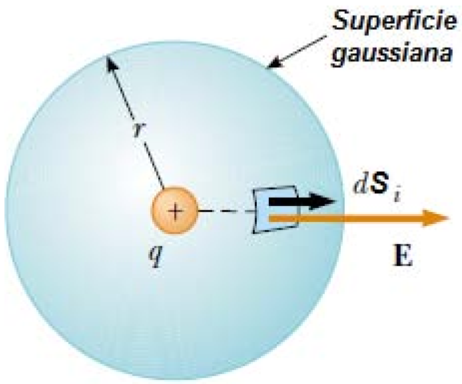

Figura 3.3: carga puntual, superficie gaussiana representada por una esfera de radio r y los vectores de campo eléctrico y diferencial de superficie.

Aplicando la ecuación 3.1 encontrada en el numeral anterior, el flujo eléctrico Φ para esta superficie gaussiana estará dado como:

$$\Phi = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{a}_r \cdot d\vec{s}\ \hat{a}_r$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint d\vec{s}$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(4\pi r^2)$$

De lo anterior se puede concluir que:

$$\varepsilon_0 \Phi = q \tag{3.2}$$

En efecto, la ecuación 3.2 verifica la afirmación de que existe una relación entre el flujo neto a través de una superficie y la carga neta encerrada por esa superficie.

A continuación se hará el análisis de algunos situaciones que involucran el flujo eléctrico con el propósito de derivar algunas conclusiones respecto de la ecuación 3.2. La figura 3.4 muestra una carga eléctrica encerrada por tres superficies (gaussianas); como se ha mencionado, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesa una superficie dada. Bajo esta circunstancia, el flujo eléctrico que atraviesa la superficie S_1 estará definido como $\Phi_1 = q/\varepsilon_0$. De igual forma, y no obs-tante la superficie S_2 no es esférica, se puede notar que el flujo eléctrico a través de ella es igual al flujo a través de la superficie S_1; lo mismo sucede con la superficie S_3. Esta observación conduce a concluir que *el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es independiente de la forma de esa superficie.*

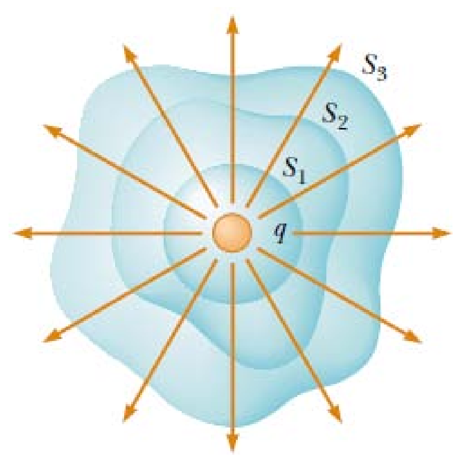

Figura 3.4: carga puntual que genera un campo eléctrico y tres superficies cerradas S_1, S_2 y S_3 de diferente forma que encierran la carga.

A continuación consideremos una carga puntual situada por fuera de una superficie cerrada de cualquier forma geométrica como lo muestra la figura 3.5. Allí se puede notar que existe un número finito de líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie, en-

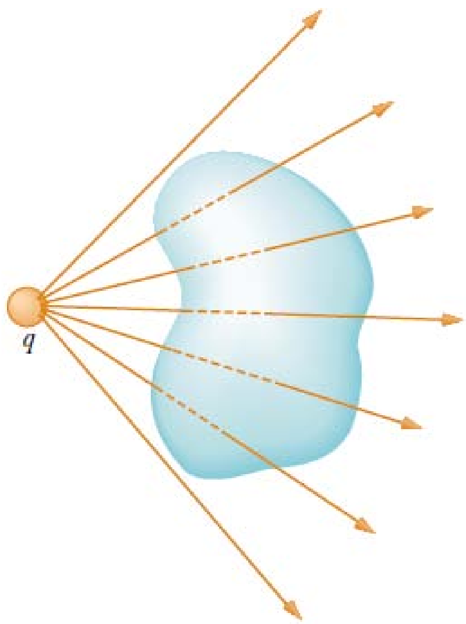

Figura 3.5: carga puntual que se encuentra por fuera de una superficie gaussiana y líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie.

trando o saliendo de ella, también se observa con absoluta claridad que el número de líneas de campo eléctrico que entran a la superficie es igual a número de líneas de campo que salen de ella. Como ya se ha definido que el flujo de campo eléctrico se define como una medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie dada, entonces se verifica que el número de líneas neto que atraviesa la superficie es igual a cero, es decir: $\Phi = 0$. Lo cual está perfectamente de acuerdo con el análisis hecho anteriormente y que condujo a obtener la ecuación 3.2:

$$\varepsilon_0 \Phi = q$$

Como se observa de la figura, la carga neta que la superficie encierra es igual a cero y por lo tanto:

$$\Phi = q/\varepsilon_0 \implies \Phi = 0/\varepsilon_0 \implies \Phi = 0$$

Considerando el análisis anterior, se puede concluir que el *flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no encierre carga eléctrica es igual a cero.*

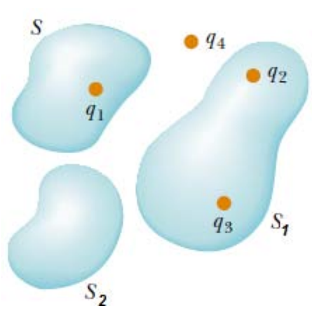

Figura 3.6: conjunto de superficies.

Por último, obsérvese lo que sucede con un sistema de cargas como el mostrado en la figura de la izquierda (fig. 3.6). Allí se muestran varias superficies las cuales contienen y no contienen carga encerrada. La superficie referenciada como S contiene una carga de magnitud q_1, por lo tanto el flujo eléctrico neto a través de ella está definido como $\Phi = q_1/\varepsilon_0$.

En relación con la superficie S_1 es fácil darse cuenta que el flujo neto a través de ella está definido como:

$$\Phi_1 = (q_2 + q_3)/\varepsilon_0$$

Finalmente se tiene la siuperficie S_2 la cual no encierra ninguna carga y por ello es posible afirmar que el flujo neto para esta superficie es $\Phi_2 = 0$. Ahora bien, si se considera el conjunto como un solo sistema, fácilmente se puede aplicar el principio de superposición y por lo tanto se tendrá que:

$$\Phi_{total} = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2$$

Como conclusión final, se puede escribir la ley de Gauss para la electricidad como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{3.3}$$

Y afirmar que:

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga neta que se encuentra encerrada por la superficie dividida por la permitividad eléctrica (ε_0).

3.4. La ley de Gauss y la ley de Coulomb

De la misma forma que se ha mencionado cuando se afirma que la ley de Coulomb expresa la fuerza entre dos cargas separadas por un distancia r y que el campo eléctrico se expresa como la fuerza que experimenta una carga de prueba ubicada en un punto P, debido a la influencia de otra carga o distribución de carga, por unidad de carga, también es posible afirmar que la ley de Coulomb se puede derivar o deducir a partir de la ley de Gauss teniendo en consideración cierta simetría.

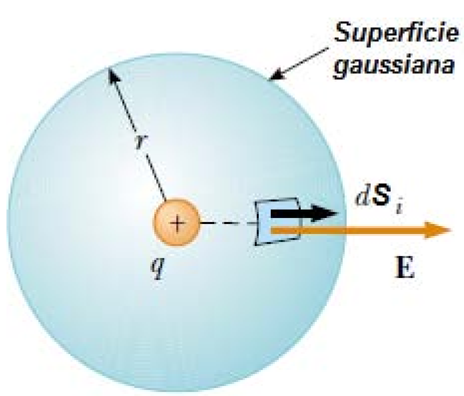

Figura 3.7: carga puntual ubicada en el centro de una superficie gaussiana esférica y campo eléctrico $\vec{E}$ generado por dicha carga.

Para llevar a cabo la deducción de la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss considérese la carga q encerrada por una superficie gaussiana esférica como lo muestra la figura 3.7; vale señalar aquí que la superficie gaussiana puede tener cualquier forma, sin embargo resulta, por simetría, mucho más sencillo si se usa una esfera de radio r. la ventaja de tener una esfera como superficie gaussiana es que, por simetría, el campo $\vec{E}$ es normal a ella y tiene la misma magnitud en todos los puntos sobre la superficie, de tal forma que se puede calcular como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint |\vec{E}||d\vec{s}|\cos 0^o = q/\varepsilon_0 \implies |\vec{E}|\oint |d\vec{s}| = q/\varepsilon_0$$

$$|\vec{E}|(4\pi r^2) = q/\varepsilon_0 \implies \vec{E} = \tfrac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{a}_r$$

Esta última ecuación ofrece el campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto a una distancia radial r de la carga puntual q.

Ahora considérese una carga de prueba q_0 que se ubica en un punto sobre la superficie gaussiana. Como la fuerza eléctrica sobre esta carga de prueba está dada como $\vec{F} = q_0\vec{E}$, entonces:

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \hat{a}_r \tag{3.4}$$

Y la ecuación 3.4 no es otra cosa que la ley de Coulomb, la cual ha sido deducida a partir de la aplicación de la ley de Gauss.

3.5. Ley de Gauss y exceso de carga en un conductor aislado

Como ya se ha mencionado, es posible hacer uso de la ley de Gauss para el cálculo del campo eléctrico producido por distribuciones de carga que ofrecen alta simetría y que si fuesen calculados de otra forma, serían situaciones de difícil solución.

Ahora bien, es posible también hacer uso de la ley de Gauss para predecir qué sucedería con un exceso de carga que se adicione a un conductor aislado. Obsérvese la figura 3.8, allí se muestra la sección transversal de un conductor aislado y una superficie gaussiana pintada en líneas punteadas. Para iniciar el análisis es necesario precisar que el material conductor es eléctricamente neutro y por lo tanto, el campo eléctrico al interior del conductor es cero. Si se adiciona al azar un exceso de carga al conductor aislado, este excedente de carga producirá campos eléctricos al interior del conductor los cuales actuarán sobre los portadores de carga haciéndolos mover y produciendo con ello que aparez-

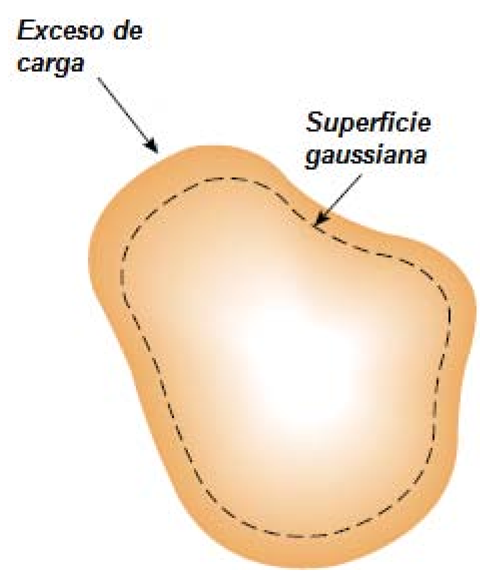

Figura 3.8: conductor aislado al cual se adiciona un exceso de carga.

can corrientes internas en el conductor. Estas corrientes redistribuyen el exceso de carga sobre el conductor ocasionando que se reduzca la intensidad de los campos eléctricos que inicialmente aparecieron. Posteriormente, el proceso llega a su fin y los campos eléctricos en el conductor se anulan provocando que las corrientes cesen y se establezcan condiciones de equilibrio electrostático.

Teniendo en consideración lo anterior, se puede verificar cómo es el flujo eléctrico sobre la superficie gaussiana considerada:
$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$; como $|\vec{E}| = 0$, entonces $\Phi = 0$ y por lo tanto, $q_0/\varepsilon_0 = 0$

Esto necesariamente implica que la carga neta encerrada por la superficie guassiana es igual cero.

Si la anterior es una respuesta satisfactoria, entonces qué sucedió con el exceso de carga que se adicionó al conductor. Pues bien, si la carga en exceso q no está dentro de la superficie gaussiana, sólo puede estar por fuera de ella y por lo tanto se encuentra sobre la superficie misma del conductor. Así, y teniendo como fundamento la ley de Gauss, es posible afirmar que: *una carga en exceso, colocada sobre un conductor aislado, se distribuye de forma total en la superficie externa del conductor.*

3.6. Demostración experimental de la leyes de Gauss y de Coulomb

Se mencionó a manera de conclusión en el numeral anterior que la ley de Gauss muestra que no es posible que exista carga neta al interior de un conductor y que si existe carga, ésta estará distribuida sobre la superficie del conductor. Ahora bien, considerando la relación que existe entre la ley de Gauss y la ley de Coulomb, es posible tratar de encontrar carga eléctrica neta al interior de un conductor y, de encontrar carga al interior de un conductor, las leyes de Gauss y de Coulomb perderían toda validez. En la figura 3.9 se muestra un experimento sencillo que ayuda a verificar que la carga neta en un conductor se encuentra distribuida en la superficie.

Inicialmente se introduce una esfera conductora cargada eléctricamente de forma positiva dentro de un conductor hueco aislado que no posee carga; una vez la esfera entra en el conductor hueco (fig. 3.9b) actúa un campo eléctrico que induce una carga negativa sobre la pared interna de conductor hueco y una carga igual y positiva sobre la superficie externa. Cuando la esfera toca el interior hueco, ésta y el conductor hueco forman un conjunto *conductor aislado* como el explicado en el numeral anterior, es decir, la carga se distribuirá sobre la superficie exterior del conductor hueco (fig. 3.9c). Si nuevamente se introduce una esfera cargada en el interior del conductor hueco, se notará que no

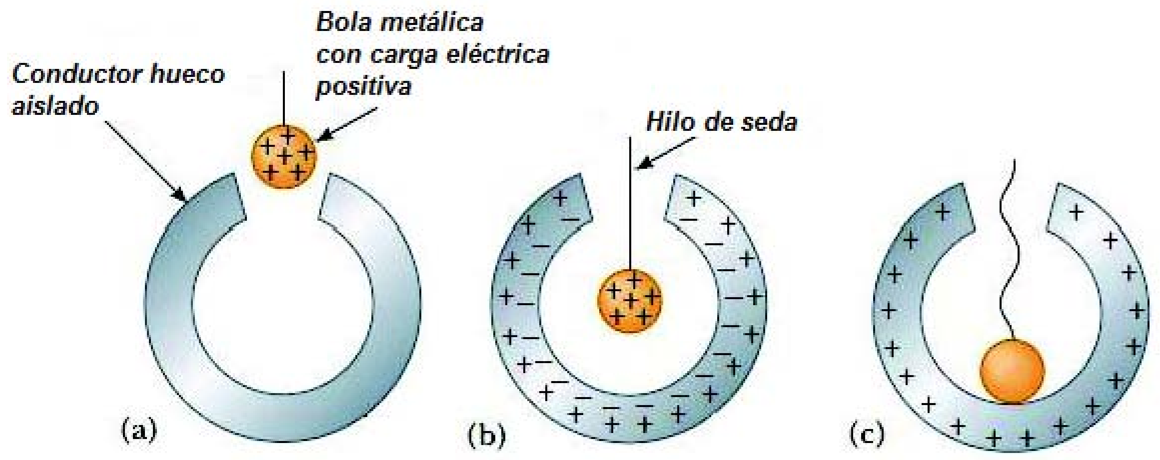

Figura 3.9: (a) conductor hueco aislado y esfera metálica cargada eléctricamente. (b) Inducción de carga eléctrica por acción del campo eléctrico y (c) redistribución de la carga eléctrica.

se ejerce ningún tipo de fuerza sobre la esfera con lo cual se demuestra que el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero; de esta forma queda demostrado que la carga trasferida a un conductor aislado siempre se alojará sobre su superficie exterior con lo cual se reafirma la validez de las leyes de Gauss y de Coulomb.

Por último y considerando lo estudiado hasta aquí, es posible derivar las siguientes conclusiones sobre conductores en equilibrio electrostático.

1. El campo eléctrico es cero en cualquier punto interior de un conductor.
2. Cualquier exceso de carga en un conductor aislado siempre se distribuirá sobre su superficie exterior.
3. el campo eléctrico $\vec{E}$ por fuera de un conductor es ortogonal a la superficie del conductor.

3.7. Aplicaciones de la ley de Gauss

Como se mencionó antes, la utilidad práctica de la ley de Gauss consiste esencialmente en proporcionar una forma fácil para el cálculo de campos eléctricos en situaciones en las cuales las distribuciones de carga que generan esos campos exhiben una elevada simetría. Es decir, en algunas situaciones de elevada simetría y de algún interés físico, el campo eléctrico puede calcularse empleando la ley de Gauss en lugar de hacer uso de las integrales estudiadas en los casos del capítulo 2. Ahora bien, para que la ley de Gauss sea útil en el cálculo del campo eléctrico, debe ser posible elegir una superficie gaussiana tal que el vector de campo eléctrico tenga una componente normal que sea cero o un valor fijo en cada punto de la superficie; o mejor, se deben cumplir que la superficie cerrada satisfaga dos condiciones:

1. El vector de campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser, en todas partes, normal o tangencial a la superficie gaussiana, de tal forma que $\vec{E}{\cdot}d\vec{s}$ se haga $|\vec{E}||d\vec{s}|$ o cero, respectivamente.

2. Sobre esa superficie gaussiana o porción de ella para la cual $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ no sea cero, el campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser constante.