

Capítulo 9

Momento lineal y colisiones

Introducción

Hasta aquí hemos estudiado la segunda ley de Newton y algunas aplicaciones de la misma para el cálculo de fuerzas, aceleraciones y velocidades; sin embargo existen muchas situaciones en las cuales no es posible aplicar de forma directa la segunda ley de Newton. Por ejemplo consideremos dos autos que chocan entre sí, allí intervienen un conjunto de fuerzas de diferentes tipos, ¿cómo es posible determinar hacia dónde se mueven los autos después del choque? En billar, ¿cómo se decide la dirección y la fuerza que se debe dar a la bola blanca para producir una carambola? Si un meteorito choca con la Tierra, ¿qué tanta energía cinética se libera en el impacto? El estudio de este tipo de situaciones implica la introducción de nuevos conceptos: **momento lineal, cantidad de movimiento e impulso, ley de conservación de la cantidad de movimiento, etc.** En los ejemplos anteriores se mencionan situaciones las cuales implican choques, de tal forma que lo que se pretende en este capítulo es suministrar las herramientas necesarias para comprender y analizar dichos eventos.

9.1. Momento lineal

En el capítulo quinto se expresó la segunda ley de Newton de la siguiente forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (9.1)$$

Ahora bien, como ya es conocido que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, es posible expresar la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$\sum \vec{F} = \frac{m d\vec{v}}{dt} \implies \sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (9.2)$$

Así, la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta $\sum \vec{F}$ que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la combinación $m\vec{v}$. A esta combinación, el producto de la masa y la velocidad de un cuerpo, se le conoce como **cantidad de movimiento lineal**.

El **momento lineal** de una partícula de masa \mathbf{m} que se mueve con una velocidad \mathbf{v} se define como el producto de la masa por la velocidad.

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (9.3)$$

Cabe señalar que la cantidad de movimiento lineal \vec{P} es un vector de magnitud igual a mv y cuya dirección es la misma que la del vector velocidad \vec{v} . La segunda ley de Newton en términos de la cantidad de movimiento lineal está dada por:

$$\sum \vec{F} = d\vec{P}/dt \quad (9.4)$$

Esta ecuación afirma que **la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento de la partícula**. De acuerdo con esta ecuación, se verifica que un cambio rápido en la cantidad de movimiento tiene asociada una fuerza neta grande, mientras que un cambio gradual en la cantidad de movimiento lineal tiene asociada una fuerza neta menor.

Unidades y componentes de la cantidad de movimiento

Dado que la cantidad de movimiento lineal es una magnitud vectorial, ésta se puede expresar en términos de sus componentes de la siguiente manera:

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z) \implies \vec{P} = (mv_x, mv_y, mv_z) \quad (9.5)$$

Así mismo, la unidades de la cantidad de movimiento en el sistema internacional son:

$$[\vec{P}] = [\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}]$$

9.1.1. Impulso

Ahora bien, la cantidad de movimiento de una partícula $\vec{P} = m\vec{v}$ y su energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ dependen de la masa y de la velocidad de la partícula. ¿Qué diferencia hay entre estas dos magnitudes? Una respuesta puramente matemática es que la cantidad de movimiento es un vector cuya magnitud es proporcional a la rapidez, mientras que la energía cinética es un escalar cuya magnitud es proporcional al cuadrado de la rapidez. No obstante, para ver la diferencia física entre ambas cantidades es necesario definir una cantidad estrechamente ligada con la cantidad de movimiento: **el impulso**.

$$\vec{J} = \left(\sum \vec{F} \right) \cdot (t_2 - t_1) \implies \vec{J} = \left(\sum \vec{F} \right) \cdot \Delta t \quad (9.6)$$

Si se considera que la segunda ley de Newton en términos de la cantidad de movimiento está dada por $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, y si además se considera que la fuerza neta que actúa sobre la partícula es constante, lo cual hace que la cantidad de movimiento también sea constante, entonces, $\frac{d\vec{P}}{dt}$ es igual al cambio total de la cantidad de movimiento $\vec{P}_2 - \vec{P}_1$ durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$, dividido sobre ese intervalo de tiempo:

$$\sum \vec{F} = \frac{(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)}{(t_2 - t_1)} \implies \vec{J} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \quad (9.7)$$



Figura 9.1: Fuerza aplicada en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$

Considérese un bloque sobre el cual actúa una fuerza neta constante \mathbf{F} durante un intervalo de tiempo t_1 a t_2 , es decir, Δt , como se muestra en la figura 9.1. Entonces el impulso de la fuerza neta sobre la partícula, denotado como \vec{J} , se define como **el producto de la fuerza neta aplicada y el intervalo de tiempo durante el cual se aplica dicha fuerza**.

La ecuación 9.7 es denominada **teorema del impulso y la cantidad de movimiento**.

El cambio en la **cantidad de movimiento** $\Delta \vec{P}$ de una partícula durante un intervalo de tiempo Δt es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre esa partícula durante ese intervalo.

Ahora bien, el teorema del impulso y la cantidad de movimiento también se cumple para fuerzas que no son constantes y, por lo tanto, se debe formular de forma general como:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \vec{F}) dt \quad (9.8)$$

9.2. Conservación de la cantidad de momento lineal

El concepto de cantidad de movimiento tiene especial importancia en situaciones en las que dos o más cuerpos interactúan entre sí.

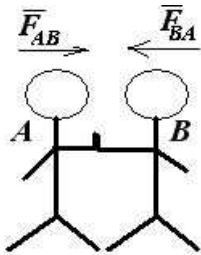


Figura 9.2: Sistema idealizado de interacción entre los cuerpos A y B.

Considérese un sistema idealizado de dos cuerpos que actúan entre sí y con ningún otro cuerpo como lo muestra la figura 9.2; cada uno de los cuerpos ejerce una fuerza sobre el otro. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las dos fuerzas siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. En consonancia con lo visto en el numeral 9.1, cada una de estas fuerzas, actuando durante un intervalo de tiempo, generan impulsos sobre los cuerpos que son iguales en magnitud y opuestos en dirección. De la misma forma, la cantidad de movimiento de los dos cuerpos son opuestos en dirección e iguales en magnitud.

Fuerzas externas. Son fuerzas ejercidas sobre cualquier parte de un sistema por algún agente externo.

Fuerzas internas. Son fuerzas que las partículas componentes de un sistema ejercen entre sí.

En el sistema descrito las fuerzas internas son \vec{F}_{BA} , que es la fuerza que ejerce el cuerpo B sobre el cuerpo A y \vec{F}_{AB} , que es la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el cuerpo B. Como no existen fuerzas externas que actúen sobre el sistema, entonces se tiene un **sistema aislado**. De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{P}_A}{dt} \quad y \quad \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}_B}{dt} \quad (9.9)$$

La cantidad de movimiento de cada cuerpo cambia, pero estos cambios no son independientes el uno del otro; según la tercera ley de Newton \vec{F}_{AB} y \vec{F}_{BA} forman un par acción reacción y, por lo tanto, son iguales en magnitud y opuestos en dirección. Así las cosas $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$, de tal forma que $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$. Se tiene entonces, en consonancia con la ecuación 9.9, que:

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}_A}{dt} + \frac{d\vec{P}_B}{dt} \implies \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{(d\vec{P}_A + d\vec{P}_B)}{dt} \quad (9.10)$$

Es decir:

$$\frac{(d\vec{P}_A + d\vec{P}_B)}{dt} = 0 \quad (9.11)$$

La ecuación 9.11 muestra que la razón de cambio de la cantidad total de movimiento \vec{P} es igual a cero. Lo anterior sucede si y sólo si la cantidad de movimiento total del sistema es constante. De hecho, las cantidades de movimiento individuales de las partículas que componen el sistema pueden cambiar, mas la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante. Así las cosas, el **principio de conservación de la cantidad de movimiento**, el cual es consecuencia de la tercera ley de Newton, plantea que:

Si la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es cero, la **cantidad de movimiento** total del sistema permanece constante.

9.3. Choques o colisiones

Para desarrollar el concepto de colisión, se hará uso de lo estudiado en el numeral inmediatamente anterior, es decir, del **principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal**. De esta forma se podrá verificar qué ocurre cuando colisionan o chocan dos partículas. Ahora bien, el término colisión será equivalente al uso del término choque con el cual se pretende representar *un evento en el cual dos partículas se aproximan entre sí durante un tiempo muy breve, razón por la cual se producen fuerzas impulsivas de una sobre otra de las dos partículas*.

En una colisión se presume, inicialmente, contacto físico como se muestra en la figura 9.3; no obstante el concepto de choque es más amplio y no se limita específicamente a situaciones en las cuales hay contacto físico directo. En la figura 9.4 se muestra a escala microscópica la colisión entre dos átomos cargados eléctricamente. Allí ese contacto

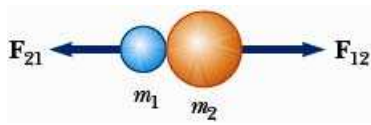


Figura 9.3: Colisión entre dos cuerpos como resultado del contacto directo.

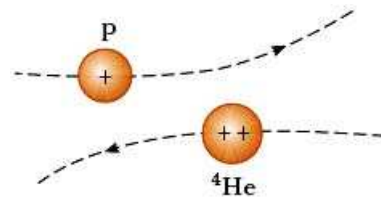


Figura 9.4: Colisión entre dos partículas cargadas eléctricamente que no implica contacto directo.

físico no es tan claro; no obstante, los átomos se repelen entre sí a través de una intensa fuerza electrostática la cual produce fuerzas impulsivas que pueden o no variar. Así, podemos definir un **choque** como un evento en el cual se producen fuerzas impulsivas como producto de la aproximación entre dos partículas donde puede o no haber contacto físico.

9.4. Colisiones en una dimensión

Como ya se ha mencionado, si la fuerza externa neta sobre un sistema es igual a cero y se produce una colisión de dos partículas que representan el sistema, la **cantidad de movimiento lineal** del mismo se conserva. No obstante puede suceder que la energía cinética, en general, no sea constante durante la colisión porque parte de esta energía se convierte en energía térmica, en energía potencial elástica cuando los objetos se deforman, en energía cinética rotacional, etc. Ahora bien, considerando si la energía cinética se conserva o no en una colisión, éstas se pueden clasificar en dos tipos: *colisiones elásticas* y *colisiones inelásticas*.

Colisiones inelásticas

Un choque o colisión se denomina *inelástica* cuando la energía cinética total final del sistema es *menor* que la energía cinética total inicial. Es decir, la energía cinética total del sistema no se conserva.

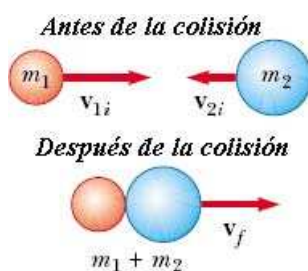


Figura 9.5: Representación de una colisión inelástica entre dos cuerpos.

En la figura 9.5 se muestra un choque inelástico entre dos bolas de billar, allí se puede notar que después de que el evento de colisión ha sucedido, las dos bolas se mueven unidas la una a la otra con la misma velocidad v_f , de tal forma que $\vec{v}_{Af} = \vec{v}_{Bf} = v_f$. Como en este tipo de colisión la energía cinética no se conserva, entonces se tendrá que $K_i > K_f$. Ahora bien, como se mencionó al inicio, si se considera el sistema que conforman las dos bolas de billar como un sistema aislado, la **cantidad de movimiento lineal** del sistema se conserva y entonces:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad (9.12)$$

Se requiere precisar que en un choque inelástico la energía cinética final del sistema es menor que la energía cinética inicial, para ello supóngase que la bola 2 de la figura 5 mostrada se encuentra en reposo, es decir que $\vec{v}_{2i} = 0$. Siendo esto así, la ecuación 9.12 se convierte en:

$$m_1 \vec{v}_{1i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad (9.13)$$

De tal forma que:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i}}{(m_1 + m_2)} \quad (9.14)$$

Ahora bien, haciendo el análisis de la energía cinética del sistema, se tiene que:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad y \quad K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \quad (9.15)$$

Sustituyendo la ecuación 9.14 en la ecuación 9.15 se obtendrá que la energía cinética final K_f se convierte en:

$$K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{(m_1 + m_2)} \quad (9.16)$$

Ahora bien, la relación que existe entre la energía cinética inicial (justo antes del choque) del sistema con la energía cinética final (justo después del choque) se puede expresar como:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \quad (9.17)$$

Es decir, la relación $\frac{K_f}{K_i}$ siempre será menor que uno, de esta forma, la energía cinética final del sistema K_f siempre será, bajo las condiciones descritas, **menor** que la energía cinética inicial K_i del sistema y, por lo tanto, se estará en presencia de un choque inelástico puesto que la energía cinética no se conserva en el evento.

Colisiones elásticas

Un choque o colisión se denomina *elástica* si las fuerzas entre los cuerpos son conservativas, de modo que no se pierde ni se gana energía mecánica durante el choque, así que la energía cinética antes y después del choque es la misma.

En la figura 9.6 se muestra un choque elástico entre dos cuerpos esféricos. Al chocar, los cuerpos cambian de dirección y se mueven, cada uno, con su propia velocidad final. Es de notar, como se dijo antes, que la cantidad de movimiento total del sistema es la misma antes y después del choque $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ y, como se trata de un choque elástico, la energía cinética también es igual antes y después del choque $\vec{K}_i = \vec{K}_f$.

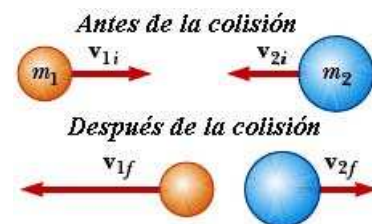


Figura 9.6: Representación de una colisión elástica entre dos cuerpos.

Considerando la figura 9.6 y lo mencionado antes, se pueden derivar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (9.18)$$

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \quad (9.19)$$

Si se multiplica la ecuación 9.18 por 2 y se reorganiza se obtiene lo siguiente:

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2i} + v_{2f})(v_{2i} - v_{2f}) \quad (9.20)$$

Organizando la ecuación 9.19 se tiene que:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (9.21)$$

Si se divide 9.20 entre 9.21 y se organizan las velocidades iniciales y finales de cada partícula se obtendrá:

$$(v_{1i} - v_{2i}) = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (9.22)$$

La ecuación 9.22 muestra claramente que la velocidad relativa de los cuerpos antes del choque, $(v_{1i} - v_{2i})$, es igual al negativo de su velocidad relativa después del choque, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Ahora, si se conocen las masas iniciales de los cuerpos y sus velocidades iniciales, es posible combinar las ecuaciones 9.18 y 9.19 y obtener las siguientes expresiones para las velocidades finales de los cuerpos en función de las velocidades iniciales.

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_{1i} + \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}v_{2i} \quad (9.23)$$

$$v_{2f} = \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)}v_{1i} + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_{2i} \quad (9.24)$$

9.5. Colisiones en dos dimensiones

Una vez que se han estudiado los choques o colisiones en una dimensión, es posible y sencillo el estudio de éstas en el plano. Para ello, lo que se requiere es simplemente extender los conceptos estudiados en una dimensión, teniendo en cuenta que para un choque en el plano se deben considerar en la ecuación de momento lineal del sistema dos dimensiones, es decir, x y y en un sistema de referencia cartesiano.

$$m_1v_{1ix} + m_2v_{2ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx} \quad (9.25)$$

$$m_1v_{1iy} + m_2v_{2iy} = m_1v_{1fy} + m_2v_{2fy} \quad (9.26)$$

La ecuación 9.25 define la conservación de la cantidad movimiento en la dimensión x y

la ecuación 9.26 la define en la dimensión y .

Un ejemplo clásico de este tipo de situación es, en general, el juego de billar. Allí se presentan colisiones en las cuales una bola inside sobre otra, generalmente estacionaria, imprimiéndole una determinada velocidad que tiene componentes tanto en x como y .

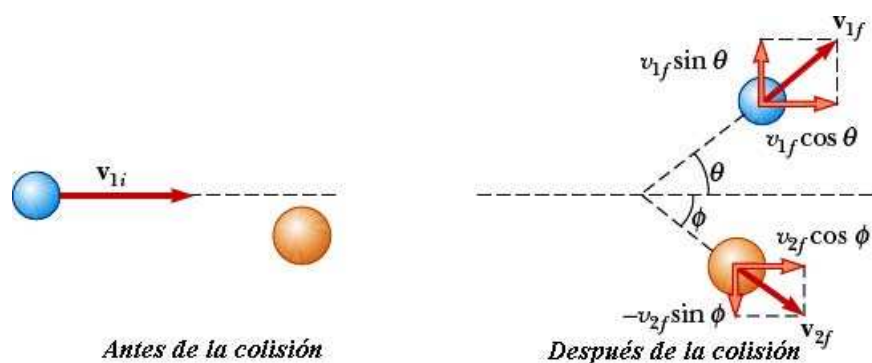


Figura 9.7: Representación de una colisión elástica en dos dimensiones.

La figura 9.7 muestra una situación en la cual dos cuerpos chocan. Antes de la colisión el cuerpo 1, con una velocidad inicial v_{1i} , se dirige en dirección del cuerpo 2 que, inicialmente, se encuentra estacionario $v_{2i} = 0$. Aunque el movimiento general de las partículas que conforman el sistema es, inicialmente, en una dimensión, posterior al choque ambos cuerpos se mueven en el plano, configurando un ejemplo clásico de colisión en el plano.

Para la resolución de este tipo de situación se hace uso de las ecuaciones estudiadas en el numeral anterior, considerando el tipo de choque y extendiéndolas a dos dimensiones.

9.6. Centro de masa

En este numeral se llevará a cabo el estudio del movimiento global de un sistema de partículas introduciendo un nuevo concepto denominado: **centro de masa**.

Definición. Se considera *centro de masa* de un sistema de partículas al punto en el cual se concentran las masas del sistema de tal forma que éste pueda ser tratado como una partícula. Así, la posición del centro de masa de un sistema se puede describir como la posición promedio de la masa del sistema.

El *centro de masas* es un concepto importante puesto que proporciona fundamento para la aplicación del modelo de partícula a un cuerpo cualquiera, ya que el centro de masa de un cuerpo se acelera como si toda la masa del sistema se concentrara en ese punto y todas las fuerzas externas actuaran sobre él.

La figura muestra un sistema de dos masas conectadas por una barra rígida, ligera

y de masa despreciable en la cual se indica la ubicación del centro de masa. Si se aplica una fuerza por arriba del centro de masa, la barra se moverá en dirección de la fuerza e intentará girar en dirección de las manecillas del reloj (sentido dextrógiro), Fig. 9.8(a). Si al contrario, la fuerza se aplica por debajo del centro de masa, de nuevo la barra se moverá en dirección de la fuerza, pero esta vez intentará girar en dirección contraria al de las manecillas del reloj (sentido levógiro), Fig. 9.8(b).

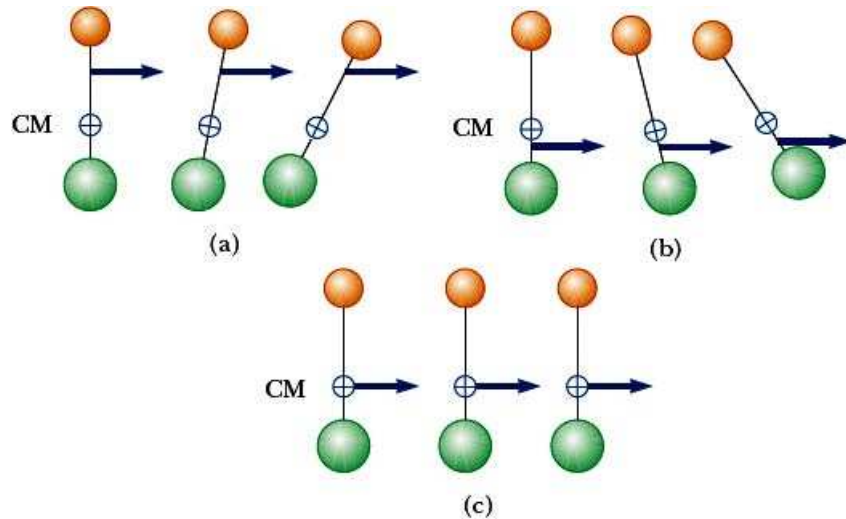


Figura 9.8: Sistema de masas desiguales unidas por una barra rígida y ligera donde se indica el centro de masa **CM** del sistema.

Por último, si la fuerza es aplicada justo en el centro de masa del sistema, este se moverá en dirección de la fuerza sin ningún intento de rotación, es decir, se moverá como si toda la masa del sistema se concentrara en el punto denotado como **CM**.

Ahora bien, como se mencionó antes, la posición del centro de masa de un sistema se puede expresar como la posición promedio ponderada de la masa del sistema. Para el caso mostrado en la Fig. 8, seleccionando un sistema coordenado adecuado como el mostrado en la Fig. 9.9 se tendrá:

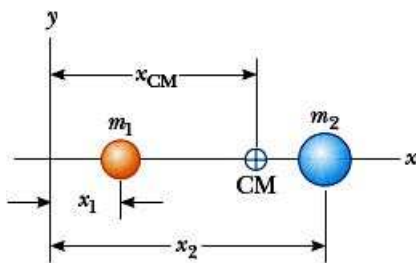


Figura 9.9: Sistema coordenado ubicando la posición del centro de masa del sistema de la Fig. 8.

En la figura de la izquierda se muestra el sistema de masas de la Fig. 9.8 ubicado en un sistema coordenado de referencia. Aplicando lo mencionado en el párrafo inmediatamente anterior se obtiene que:

$$x_{CM} \equiv \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (9.27)$$

Aunque la ecuación 9.27 define el centro de masa para el caso concreto que se muestra en la figura 9.8, este resultado se puede extender para casos más generales, es decir,

cuando se trate de cuerpos que se extienden en un plano o través de un volumen:

$$x_{CM} \equiv \frac{(\sum m_i x_i)}{(\sum m_i)}; \quad y_{CM} \equiv \frac{(\sum m_i y_i)}{(\sum m_i)} \quad y \quad z_{CM} \equiv \frac{(\sum m_i z_i)}{(\sum m_i)} \quad (9.28)$$

En general:

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\sum (m_i \vec{r}_i)}{\sum (m_i)} \quad (9.29)$$

Por último, si lo que se considera es un sistema de masa extendido sobre un área o un volumen, es posible considerar ese sistema extendido como un gran conjunto de partículas con masas m_i y cuya distancia de separación entre partículas tiende a cero. Así las cosas, el centro de masa del sistema se puede calcular aplicando la ecuación 9.30:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (9.30)$$